数理解析研究所講究録
1518巻 2006年 97-104

Rational-fold branched coverings and hyperbolic spatial graphs

大阪産業大学 教養部　市原 一裕 (Kazuhiro ICHIHARA)
College of General Education,
Osaka Sangyo University

金沢大学大学院 自然科学研究科　牛島 顕 (Akira USHIJIMA)
Graduate School of Natural Science and Technology,
Kanazawa University

概要

This note is a résumé of the authors' preprint [IU06].

1 有理分岐被覆とは

有理分岐被覆とは、周期的な対称性のある対象（結び目や絡み目、空間グラフやより一般に多様体）から別の周期的なものを作り出す方法ですが、ここでは結び目を用いて説明します。

定義；強可逆

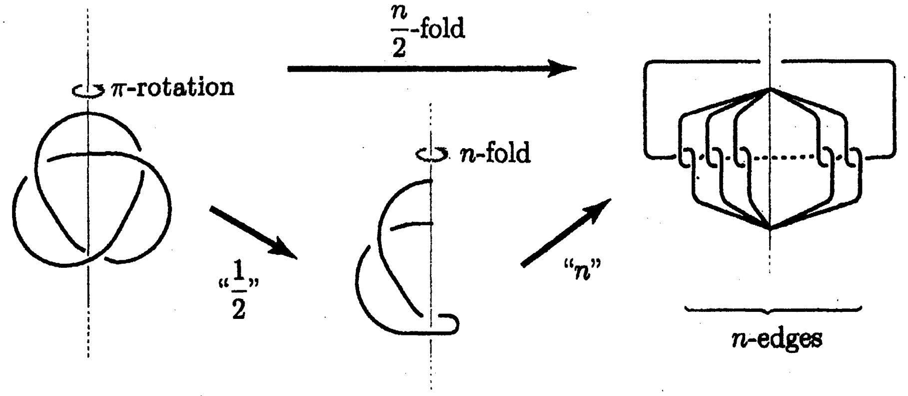
S^3 内の結び目 K に対し、これが強可逆 (*strongly invertible*) であるとは次の二つを満たす時をいう。

1. (S^3, K) に π 回転が作用し
2. その回転の軸と K とが丁度二点で交わる。

上の定義の中に現れる π 回転の事を、ここでは対合と呼ぶ事にします。この様な結び目と自然数 n に対し、$n/2$ 重巡回分岐被覆 (*$n/2$-fold cyclic branched covering*) とは次の二つの操作で得られるものの事です。

(i) 対合 ι により (S^3, K) の商空間を作る。このとき得られるものは、S^3 と同相である S^3/ι と、その中に含まれる、ι による K の像として得られる弧 γ である。このとき γ の端点は、ι による回転の軸 α の像の上にある。

(ii) $\iota(\alpha)$ に沿って $(S^3/\iota, \gamma)$ の n 重分岐被覆を取る。このとき得られるものは、S^3 と同相である S^3/ι の n 重分岐被覆と、この被覆による γ の逆像としての空間グラフである。



この様な操作で得られる空間グラフには次の性質をがあります。

定義；θ_n 曲線

3 以上の自然数 n に対し、S^3 内の連結な空間グラフ G が θ_n 曲線であるとは、頂点が丁度二つだけで、それらの次数が共に n であるときをいう。

更に、この空間グラフは次の性質も満たしています。

定義；強周期的

1. G を、S^3 内の連結な空間グラフとするとき、G が写像 φ に関して強周期的（*strongly periodic*）であるとは、次の二つを満たす時をいう。
   (a) (S^3, G) に α を軸とする周期 n の回転として φ が作用し、
   (b) G と α が丁度二点で交わる。
2. G が連結でない場合にも強周期的であるという言葉を用いる。その意味は、G の各連結成分が共通の回転作用に関して強可逆であるときをいう。

これは結び目や絡み目の場合の「強可逆」の一般化となっていて、強可逆結び目から $n/2$ 重巡回分岐被覆で得られるものは、その構成法から強周期的な θ_n 曲線となります。

上の図にある様な、三つ葉結び目から $n/2$ 重巡回分岐被覆で得られる θ_n 曲線は、"Kinoshita's θ-curve" や "Suzuki's Brunnian graph"、"Thurston's knotted Y" などと呼ばれます。更にこれらが双曲的である事が、[Thu97, PZ96, Ush99] において示されています。ここで「双曲的」とは以下の意味です。

定義；双曲的

S^3 内の空間グラフが双曲的であるとは、その外部が適当な完備双曲構造を持つときをいう。具体的には

1. 球面と同相な境界は無く、
2. トーラスと同相な境界は cusp に対応し、
3. 種数が 2 以上の境界は全測地的な境界に対応する。

$n/2$ 重巡回分岐被覆による θ_n 曲線の構成法は三つ葉結び目以外にも適用出来るので、以上の事実から次の問題を考える事が出来ます。

問題

1. 双曲的な θ_n 曲線が得られるのは、どの様な条件を満たす場合か。
2. どの結び目がその条件を満たすか。

一つ目の問題に関する完全な回答と、二つ目に該当する結び目のクラスを幾つか紹介するのが、[IU06] の主題です。

2 一つ目の問題の答え

一つ目の問題の答として、次の定理が成り立ちます。

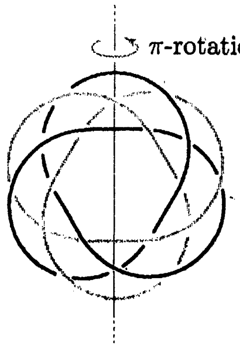
定理 1. K を、S^3 内の非自明な強可逆結び目とし、その対合の軸を α とする。この K と α に対し、K から α に沿った $n/2$ 重巡回分岐被覆で得られる θ_n 曲線を θ_n^K で表す事とする。このとき次の三つの条件は同値である。

1. θ_n^K が双曲的となる、3 以上の自然数 n が存在する。

2. 3 以上の任意の自然数 n に対し、θ_n^K は双曲的である。

3. $K \cup \alpha$ の外部 $\mathrm{E}(K \cup \alpha)$ がアトロイダルである。

なお、この定理において「K が結び目である」という仮定は欠かせません。例えば K を非自明な 2 成分トーラス絡み目とすると、$\mathrm{E}(K \cup \alpha)$ はアトロイダルですが、任意の $n \geq 3$ に対して θ_n^K は双曲的ではない事が [Ush04] にて示されています。



この定理を証明する為に、用語を一つと命題を二つ用意します。

定義：同変

M を、周期 n の作用 φ のある三次元多様体とし、S をその部分多様体とする。このとき S が φ 同変（*φ-equivariant*）であるとは、次のどちらかが成り立つ事である。

- $\varphi^i(S) = S$ である。
- $1 \leq i \leq n-1$ なる任意の i に対して $\varphi^i(S) \cap S = \emptyset$ である。

一つ目の命題は以下のものです。

命題 2. L を、S^3 内の強可逆な絡み目とし、その対合の軸を α とする。また L から α に沿った $n/2$ 重巡回分岐被覆で得られる θ_n 曲線を θ_n^L とし、その強周期性の基となる回転の軸を α_n で表す事とする。このとき $\mathrm{E}(\theta_n^L \cup \alpha_n)$ がアトロイダルとなる $n \geq 1$ が存在するなら、任意の $n \geq 1$ に対し $\mathrm{E}(\theta_n^L \cup \alpha_n)$ はアトロイダルである。

定義から θ_1^L とは端点が α 上にある弧となり、θ_2^L は元の L となります。

命題 2 の証明. 二段階に分けて証明される。

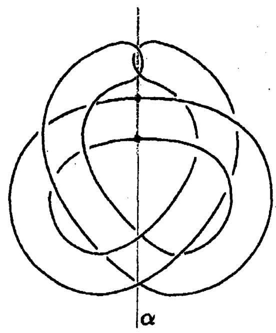
第一段階は、或る $n \geq 2$ に対し $\mathrm{E}(\theta_n^L \cup \alpha_n)$ がアトロイダルであるという命題の仮定から、$\mathrm{E}(\theta_1^L \cup \alpha_1)$ もアトロイダルであるという事を示す。この部分の証明は、同変ループ定理を用いて $\mathrm{E}(\theta_n^L \cup \alpha_n)$ での性質を $\mathrm{E}(\theta_1^L \cup \alpha_1)$ に落とす事で得られる。

次の第二段階は、今得られた $\mathrm{E}(\theta_1^L \cup \alpha_1)$ がアトロイダルであるという仮定から、全ての $n \geq 2$ に対して $\mathrm{E}(\theta_n^L \cup \alpha_n)$ がアトロイダルであるという事を示す。この部分の証明は、同変トーラス定理を用いて $\mathrm{E}(\theta_1^L \cup \alpha_1)$ での性質を $\mathrm{E}(\theta_n^L \cup \alpha_n)$ に持ち上げる事で得られる。 □

二つ目の命題は以下のものです。

命題 3. G を、S^3 内の強周期的空間グラフとし、その強周期性の基となる回転の軸を α とする。このとき、もし $\mathrm{E}(G)$ がアトロイダルならば、$\mathrm{E}(G \cup \alpha)$ もアトロイダルである。

この命題では G の連結性を仮定する必要はありません。またこの命題の逆は成り立たない事も知られています。例えば G としてトンネル数が 1 の非自明なサテライト結び目を取ります（次の図参照）。この様な結び目は強可逆である事が知られていて、更に $\mathrm{E}(G \cup \alpha)$ はアトロイダルである事も証明出来ます（[IU06, Proposition 10] 参照）。しかし $\mathrm{E}(K)$ には本質的トーラスとしてサテライトトーラスがある事から、アトロイダルではありません。



命題 *3* の証明. $\mathrm{E}(G \cup \alpha)$ 内に埋め込まれた任意のトーラスを T として、これの圧縮円盤を見付けるのが目標である。

「$\mathrm{E}(G)$ 内で T がアトロイダル」との仮定から、T には次の二通りの可能性が有り得る。

1. $\mathrm{E}(G)$ 内で $\partial\mathrm{E}(G)$ に平行である。
2. $\mathrm{E}(G)$ 内で圧縮円盤がある。

前者の場合は、次の補題から後者の場合に帰着させ得る事が分かる。

補題 4. S^3 内の強周期的空間グラフを G とし、その強周期性の基となる回転の軸を α とする。そして $\mathrm{E}(G)$ 内に埋め込まれているトーラスは常に圧縮可能であるとする。このとき、$\mathrm{E}(G \cup \alpha)$ 内に埋め込まれているトーラスで、$\mathrm{E}(G)$ 内ではその境界成分の何れかと平行となるものがもしあれば、G は結び目であり、そのトーラスには $\mathrm{E}(G)$ 内で圧縮円盤が存在する（従ってこの場合の G は自明な結び目である）。 □

この補題の証明は略す。詳しくは [IU06, Lemma 6] 参照の事。

次に $\mathrm{E}(G)$ 内で圧縮円盤がある場合は、Smith 予想の肯定的解決を用いて、次の補題が成り立つ。この補題の証明も略す。詳しくは [IU06, Lemma 7] 参照の事。

補題 5. G を、S^3 内の強周期的空間グラフとし、その強周期性の基となる回転の軸を α とする。また $\mathrm{E}(G)$ 内に埋め込まれたトーラスを T で表す。このとき、もし $\mathrm{E}(G)$ 内で T の圧縮円盤が取れるならば、それは特に $\mathrm{E}(G \cup \alpha)$ 内で取る事が出来る。 □

これら二つの補題を組み合わせて、命題 3 の証明が完了する。 □

これらを用いて定理 1 は以下の様にして示されます。

定理 1 の証明. 三つの部分に分けて証明する。

$1 \Rightarrow 2$ について。これは明らか。

$2 \Rightarrow 3$ について。θ_n^K が双曲的なので、$\mathrm{E}(\theta_n^K)$ はアトロイダルである。すると命題 3 より $\mathrm{E}(\theta_n^K \cup \alpha_n)$ もアトロイダルなので、命題 2 より特に $\mathrm{E}(\theta_2^K \cup \alpha_2) = \mathrm{E}(K \cup \alpha)$ もアトロイダルとなる。

$3 \Rightarrow 1$ について。仮定から次の二つが成り立つ。

1. $\mathrm{E}(K \cup \alpha)$ がアトロイダルである事から、命題 2 より $\mathrm{E}(\theta_1^K \cup \alpha_1)$ もアトロイダルである。
2. K が非自明である事から、二糸タングル $(\mathrm{E}(\theta_1^K), \alpha_1)$ は素である。即ち $(\mathrm{E}(\theta_1^K), \alpha_1)$ は分離不能、局所自明、分割不能である。

この二つの性質が成り立つと、$\mathrm{E}(\theta_1^K)$ の境界によるダブル（位相的には S^3）により α_1 のダブルとして得られる二成分絡み目 D_{α_1} が双曲的になるという事が知られている。このとき、任意の $n \geq 3$ に対して、D_{α_1} に沿った n 重巡回分岐被覆が双曲多様体になる事が知られている。これによって得られた多様体は、元の D_{α_1} の対称性から導かれる、位数が 2 の対称性を持つので、それで割る事により境界付き多様体が得られるが、これは θ_n^K の作り方から $\mathrm{E}(\theta_n^K)$ と同じものとなっている。さて Mowtow-Prasad の剛性定理より、得られた多様体を全測地的境界のある双曲多様体と見なす事が出来る。これは即ち $\mathrm{E}(\theta_n^K)$ が全測地的境界のある双曲多様体であるという事なので、任意の $n \geq 3$ に対し θ_n^K が双曲的である事が示された。

以上より、定理 1 の証明が完了する。 □

3 二つ目の問題に答える；双曲的空間グラフを生じる強可逆結び目

双曲的空間グラフを生じる強可逆結び目のクラスとして、ここでは「単純結び目」と「トンネル数が 1 の結び目」の二つを挙げます。

まずは強可逆な単純絡み目に対し、次の命題が成り立ちます。

命題 6. L を、S^3 内の非自明で強可逆な単純絡み目、即ち非自明で強可逆で $\mathrm{E}(L)$ がアトロイダルとなっている絡み目とする。このとき、対合の軸 α の取り方に依らず、$\mathrm{E}(L\cup\alpha)$ はアトロイダルである。 □

この命題は、命題3と定理1、それと Thurston による S^3 内の結び目補空間の幾何構造に関する分類の結果を組み合わせると直ちに得られます。

次に、トンネル数が1の結び目に対しては、次の命題が成り立ちます。

命題 7. K を、S^3 内の非自明なトンネル数が1の結び目、即ち $\mathrm{E}(K)$ 内にプロパーに埋め込まれている弧 τ があり、$\mathrm{E}(K\cup\tau)$ が $g(\partial\mathrm{E}(K\cup\tau))=2$ のハンドル体になっているものとする。このときも上の場合と同様に、対合の軸 α の取り方に依らず、$\mathrm{E}(K\cup\alpha)$ はアトロイダルである。

この命題の証明の流れは以下の通り。

T を、$\mathrm{E}(K\cup\alpha)$ 内に埋め込まれたトーラスとする。仮定を用いて、これの圧縮円盤を $\mathrm{E}(K\cup\alpha)$ 内で見付ける事が目標である。必要に応じて、多様体や曲面を作用に対して同変になる様にしておく。

命題6より、考えるべき K をトンネル数1で且つサテライトなものと仮定して構わない。このとき [MS91] より K は次の形で得られる事が知られている。

$$K=\mathrm{E}(K_0)\bigcup_{T_s}\mathrm{E}(K_1\cup K_2)$$

ここで K_0 はトーラス結び目、$K_1\cup K_2$ は二橋絡み目、T_s は $\partial\mathrm{E}(K_0)$ と $\partial\mathrm{E}(K_2)$ の貼り合わせで生じるサテライトトーラスである。

これらの記号の下、$\mathrm{E}(K)$ 内での T の振る舞いには次の三通りが有り得る。

T が本質的であるとき。 T は $\mathrm{E}(K)$ 内で本質的なので、特に $\mathrm{E}(K\cup\alpha)$ 内でも本質的である事に注意する。$T_s':=T_s\cap\mathrm{E}(K\cup\alpha)$ とする。T をイソトピーで動かして、次のどちらかが成り立つ様に出来る。

1. $T\cap T_s\neq\emptyset$ で、その交わりは T 内でも T_s 内でも本質的な閉曲線から成る。
2. $T\cap T_s=\emptyset$,

一つ目の場合が起こったとする。切り貼りの一般論から、$T\cap\mathrm{E}(K_0)$ が $\mathrm{E}(K_0)-(\mathrm{E}(K_0)\cap\alpha)$ 内の本質的アニュラスから成る事が分かる。ここで、対合による $(\mathrm{E}(K_0),\alpha)$ の商空間を定理1の証明と同じ様に考えると、タングルが得られ、この中に本質的アニュラスが生じる。ところがトーラス結び目の性質からこのタングルが素でかつアトロイダルで

あり、従ってアンアニュラーでなければならないので、ここに矛盾が生じる。

一方二つ目の場合、T は $\mathrm{E}(K_0)$ か $\mathrm{E}(K_1 \cup K_2)$ のどちらかに含まれている事になるが、K_0 と $K_1 \cup K_2$ は共に単純絡み目である事が知られているので、命題 6 より $\mathrm{E}(K \cup \alpha)$ 内で T の圧縮円盤が見つかってしまい、この場合も T が本質的であるという仮定に矛盾する。

以上より、T が本質的である場合は起こり得ない事が分かった。

T が境界と平行のとき。この場合、補題 4 から圧縮円盤を見付ける事が出来るので、次の場合に帰着する。

T が圧縮可能なとき。この場合、補題 5 から圧縮円盤を $\mathrm{E}(K \cup \alpha)$ 内で取る事が出来るので、証明が終わる。 □

参考文献

[IU06] Kazuhiro Ichihara and Akira Ushijima, *Strongly invertible knots, rational-fold branched coverings and hyperbolic spatial graphs*, `arXiv:math.GN/0603707`, 2006.

[MS91] Kanji Morimoto and Makoto Sakuma, *On unknotting tunnels for knots*, Math. Ann. **289** (1991), no. 1, 143–167.

[PZ96] Luisa Paoluzzi and Bruno Zimmermann, *On a class of hyperbolic* 3*-manifolds and groups with one defining relation*, Geometriae Dedicata **60** (1996), no. 2, 113–123.

[Thu97] William P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[Ush99] Akira Ushijima, *The Canonical Decompositions of Some Family of Compact Orientable Hyperbolic* 3*-manifolds with Totally Geodesic Boundary*, Geometriae Dedicata **78** (1999), no. 1, 21–47.

[Ush04] ———, *Hyperbolic spatial graphs arising from strongly invertible knots*, Topology Appl. **139** (2004), no. 1-3, 253–260.